Seminarii de logica 2010 - 2011

C. Masalagiu, C. Varlan, V. Alaiba

December 14, 2010

Contents

Chapter 1

Seminarul 8

1.1 Transcrierea unor porpozitii in LP1

- Fie propozitia P(x): „x are o pisica.”, C(x): „x are un caine.”, H(x): „x are un hamster.”. Exprimati cu ajutorul conectorilor logici si a propozitiilor definite anterior urmatoarele expresii:
  a) Un student din clasa are o pisica, un caine si un hamster.
  b) Toti studentii din clasa au un caine, o pisica sau un hamster.
  c) Unii studenti au o pisica si un hamster dar nu au caine.
  d) Nici un student din clasa nu are caine, pisica sau hamster.
  e) Pentru oricare animal (pisica, caine, hamster) exista macar un student din clasa care sa aiba un astfel de animal.
  f) Toti studentii au cate un animal dar cei care au pisica nu au hamster si cei care au caine nu au pisica.

- Fie j un numar dintr-o secventa de n numere aflat pe pozitia k. Definim propozitia binara Poz(k,j) ca fiind adevarata daca numarul j se afla pe pozitia k (de exemplu daca secventa este <3,5,7> atunci vor fi adevarate porpozitiile Poz(1,3), Poz(2,5), Poz(3,7) si numai acestea). Traduceti urmatoarele afirmatii în expresii logice din LP1:
  a) Secventa este finita.
  b) Secventa contine cel putin trei numere distincte (de exemplu secventa poate fi <4,3,7,9,1,3,4,7> dar nu <2,3,2,3>).
  c) Secventa este sortata (strict crescator, crescator, strict descrescator, descrescator).
  d) In secventa exista trei numere care sa fie egale cu pozitia lor.
  e) Secventa este nevida.
  f) Exista trei numere egale care sunt consecutive în secventa.

- Scrieti o formula care sa exprime faptul ca functia $f \in \mathcal{F}_3$ este bijectiva.

- Scrieti o formula care sa exprime faptul ca functia $f \in \mathcal{F}_1$ este surjectiva. Inversati (textual) ordinea variabilelor legate, fara a schimba felul in care acestea sunt legate. Explicati noul inteles al formulei.

1.2 Sintaxa LP1

1.2.1 Subformulele, arborii unei formule date

- Sa se parantetizeze corect apoi sa se construiasca multimea subformulelor precum si arborele asociat pentru fiecare din formulele (**LP1**) urmatoare:

  1. $(\forall x)(P(x,a) \wedge Q(y) \vee \neg(\exists z)P(z,x))$
  2. $(\exists x)(\forall z)(P(x,y,z) \vee \neg Q(x)) \wedge (\forall x)(Q(X) \wedge R(f(x,z),a))$
  3. $P(x) \vee \neg P(y) \wedge (\forall z)Q(z,a)$
  4. $(\forall x)P(x,f(x)) \wedge Q(x) \vee \neg P(a,f(z))$
  5. $(\exists x)(\exists y)(P(f(x,a),f(a,y)))$

- Sa se precizeze care sunt variabilele libere si care sunt variabilele legate pentru fiecare din formulele de la exercitiul precedent. Care este domeniul sintactic pentru fiecare din variabilele legate ?

1.3 Semantica LP1

1.3.1 Structuri

- Pentru fiecare din formulele urmatoare, sa se gaseasca o structura $S = \langle \mathcal{U}_\mathcal{S}, \mathcal{I}_\mathcal{S} \rangle$ astfel incat formula sa fie satisfacuta:

  1. $F_1 = (\forall x)(\exists y)(P(x,y) \wedge Q(f(x),a))$
  2. $F_2 = (\forall x)(P(x,z) \vee \neg(\exists z)Q(z))$
  3. $F_3 = (\forall x)(P(x) \vee \neg P(x))$

  Puteti gasi structuri pentru cele trei formule care sa nu satisfaca formulele ?

- Gasiti o interpretare adecvata pentru ca formula
  $F = (\forall x)(\exists y)P(x,y) \vee \neg(\exists z)Q(a,f(z))$
  sa fie satisfacuta in structura $S = \langle \mathcal{U}_\mathcal{S}, \mathcal{I}_\mathcal{S} \rangle$ atunci cand universul $\mathcal{U}_\mathcal{S}$ este:

  1. Multimea numerelor naturale;
  2. Multimea culorilor impreuna cu alb si negru;
  3. Multimea fructelor.
  4. Universul Herbrand

- Sa se gaseasca o interpretare astfel incat formula urmatoare sa fie satisfacuta in universul Herbrand:
  $F = (\exists y)(\forall z)(P(a) \wedge Q(y,g(z)))$

Chapter 2

Seminarul 9

2.1 Forme Normale

2.1.1 FNSC

- Sa se aduca la Forma Normala Skolem Clauzala (FNSC) urmatoarele formule din **LP1**:

  1. $(\forall x)(P(x,z) \wedge Q(f(x))) \vee Q(x) \wedge P(x, f(x));$
  2. $(\exists x)(\forall y)(P(x, f(x,y)) \wedge Q(a,y)) \vee (\forall x)(P(x,x))$
  3. $(\exists z)(P(z) \wedge Q(f(a,y))) \vee (\forall y)(R(z,y))$
  4. $(\forall x)(P(x)) \wedge \neg(\forall x)(P(f(x))) \vee Q(x,z)$
  5. $(\exists x)(P(f(x,x),x) \wedge Q(y,a)) \vee (\forall y)(P(x, f(y,z)))$

2.2 Rezolutia de baza

- Sa se gaseasca Universul si Extensiile Herbrand pentru urmatoarele formule din **LP1**:

  1. $(\forall x)(\forall y)(\forall z)(P(x,y) \wedge (Q(z) \vee Q(y)) \wedge (P(f(x,a),y) \vee \neg Q(x)))$
  2. $(\forall x)(P(x) \wedge (Q(f(x)) \vee P(a)))$
  3. $(\forall x)(\forall y)(P(x) \wedge Q(f(a,x)) \wedge (\neg P(y) \vee Q(b)))$

- Sa se stabileasca utilizand rezolutia de baza daca urmatoarele formule din **LP1** sunt satisfiabile:

  1. $(\forall x)(\forall y)(P(x,x) \wedge (\neg P(x, g(y)) \vee Q(y)) \wedge \neg Q(f(a)))$
  2. $(\forall x)(\forall y)(P(x) \wedge (\neg Q(x,x) \vee \neg(P(y)) \wedge Q(y))$
  3. $(\forall x)(\forall y)(\forall z)(P(x, f(x,y)) \wedge (\neg P(a,x) \vee \neg Q(x,z)) \wedge (Q(y,y) \vee Q(f(a, g(a)), y)))$

Chapter 3

Seminar 10

3.1 Julia Robinson

- In vederea stabilirii posibilitatii de unificare, sa se aplice algoritmul Juliei Robinson urmatoarelor multimi de formule:
  1. $\mathcal{L}_1 = \{P(x,z), P(f(y),y), P(u,g(a))\}$
  2. $\mathcal{L}_2 = \{P(x,y), P(f(y),y), P(y,y)\}$
  3. $\mathcal{L}_3 = \{P(f(g(x)),x,z), P(f(y),a,h(u,v,b))\}$
  4. $\mathcal{L}_4 = \{Q(x,y,f(x)), Q(f(z),z,u), Q(v,a,t)\}$

3.2 Rezolutia Pura

- Sa se stabileasca utilizand pura daca urmatoarele formule din **LP1** sunt satisfiabile:
  1. $(\forall x)(\forall y)(P(x,x) \wedge (\neg P(x,g(y)) \vee Q(y)) \wedge \neg Q(f(a)))$
  2. $(\forall x)(\forall y)(P(x) \wedge (\neg Q(x,x) \vee \neg(P(y)) \wedge Q(y))$
  3. $(\forall x)(\forall y)(\forall z)(P(x,f(x,y)) \wedge (\neg P(a,x) \vee \neg Q(x,z)) \wedge (Q(y,y) \vee Q(f(a,g(a)),y)))$